TEMA 29: EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA. INTEGRAL DEFINIDA.

I. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

I.1. PARTICIÓN DE UN INTERVALO CERRADO

I.2. SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES

I.3. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DADA

I.4. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

I.5. CONDICIONES SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

II. TEOREMAS IMPORTANTES SOBRE LA INTEGRAL DEFINIDA

- TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL
- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL
- REGLA DE BARROW
- FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLE

III. CÁLCULO DE ÁREAS

IV. BIBLIOGRAFÍA

TEMA 29: EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA. INTEGRAL DEFINIDA.

El origen del cálculo integral se remonta a más de veinte siglos atrás, cuando la escuela griega de geometría intentaba resolver el problema de determinar el área de regiones planas, limitadas por fronteras curvas. Fue Arquímedes el primero en idear un método, denominado de método de "exhausción", para resolver el problema. Este método consistía en esencia, en que si se quería determinar el área de una región se inscribían y circunscribían regiones poligonales cada vez más próximas a ella, cuyas áreas fuesen fáciles de calcular.

Con el método de exhausción, Arquímedes fue capaz de hallar las fórmulas de las áreas del círculo, segmento de parábola y de otras regiones.

La falta de técnicas algebraicas hizo imposible extender el método a otros tipos de regiones, y no fue hasta el siglo XVII cuando el cáclulo integral como tal nació.

En la parte III trataremos este tema, al calcular áreas mediante las integrales definidas que pasamos a ver. Antes debemos formalizar algunos conceptos. Pasemos a ello desarrollando los puntos del esquema expuesto anteriormente.

I. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Antes de de abordar el concepto de integral definida debemos estudiar una serie de conceptos.

I.1. PARTICIÓN DE UN INTERVALO CERRADO

<u>Definición:</u>

Se llama partición del intervalo [a,b] a una colección finita P de puntos de [a,b], $P=\{x_0,x_1,.....,x_n\}$ verificando que $x_0=a$, $x_n=b$, y $a=x_0<x_1<x_2<....<x_n=b$.

Llamamos diámetro de la partición P a la mayor de las diferencias x_i-x_{i-1}, con i=1,2,3,..,n, y se denota diam(P).

La partición P determina n subintervalos cerrados $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ...$[x_{n-1},x_n]$, siendo $I_k=[x_{k-1},x_k]$ el k-ésimo subintervalo de P.

Definición

Dadas dos particiones P,Q del intervalo [a,b], diremos que Q es más fina que P, o bien P⊆Q, si se verifica que todo punto de P pertenece a Q.

I.2. SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES

Sea f:[a,b]→ℝ una función acotada.

Por ser f una función acotada, el conjunto de números reales $f(I_k)$ es no vacío y acotado. Notemos por $\begin{cases} m_k(f)=\text{Inf}(f(I_k)) \\ M_k(f)=\text{Sup}(f(I_k)) \end{cases}$.

Se llama suma superior de la función f respecto de la partición P al número real S(f,P) dado por:

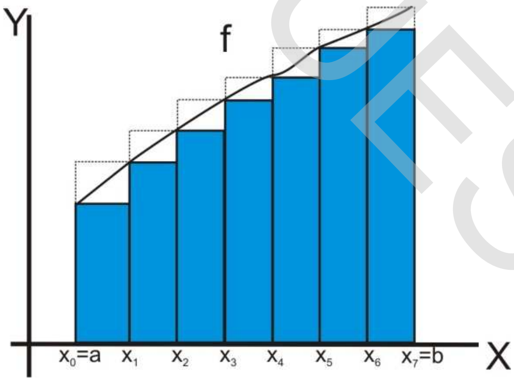
$$S(f,P)=M_1(f,P)(x_1-x_0)+M_2(f,P)(x_2-x_1)+......+M_n(f,P)(x_n-x_{n-1})$$

Análogamente se define suma inferior de f respecto de la partición P al número real I(f,P) dado por:

$$I(f,P)=m_1(f,P)(x_1-x_0)+m_2(f,P)(x_2-x_1)+......+m_n(f,P)(x_n-x_{n-1})$$

Teniendo en cuenta que $m_k(f,P)\le M_k(f,P)\ \ \forall k\in\{1,2,...,n\}$ es inmediato que I(f,P)≤S(f,P) y esto ocurre para cualquier partición del intervalo [a,b].

Geométricamente:



I(f,P) es la suma de las áreas de los rectángulos azaules y S(f,P) representa la suma de las áreas de los rectángulos azules y blancos.

Veamos una propiedad importante de las sumas inferior y superior.

Proposición

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada.

i) Si P y P' son particiones de [a,b] tales que $P\subset P'$, entonces:

$$S(f,P)\geq S(f,P')\geq I(f,P')\geq I(f,P)$$

ii) Si P_1,P_2 son particiones arbitrarias de [a,b], entonces se tiene que $I(f,P_1)\leq S(f,P_2)$.

-Dem-

i) Lo probamos por inducción sobre el número de elementos de P=-P.

* Si $P'-P=\emptyset$, no hay nada que probar pues P=P'.

* Si P'-P tiene un elemento, entonces $P'=P\cup\{y\}$ con $y\in[a,b]-P$.

Sea $P=\{x_0,x_1,.....,x_n\}$ entonces $\exists k\in\{1,2,...,n\}$ tal que $x_{k-1}<y<x_k$.

$S(f,P)-S(f,P')=Sup(f(I_k)).(x_k-x_{k-1})-Sup(f([x_{k-1},y]))(y-x_{k-1})-Sup(f([y,x_k]))(x_k-y)\geq$
$Sup(f(I_k))[(x_k-x_{k-1})-(y-x_{k-1})-(x_k-y)]=0.$

donde hemos usado que $Sup(f(I_k))\geq Supf([x_{k-1},y])$ y $Sup(f(I_k))\geq Supf([y,x_k])$.

Por tanto $S(f,P)\geq S(f,P')$.

El mismo razonamiento teniendo en cuenta que las desigualdades se invierten al cambiar supremos por ínfimos permite comprobar que $I(f,P)\leq I(f,P')$

* Supongamos que el resultado es cierto cuando P'-P tiene n elementos y probémoslo cuando tiene n+1 elementos. Sea Q la partición $P'-\{z\}$ con $z\in P'-P$. Por hipótesis de inducción tenemos que $I(f,P)\leq I(f,Q)\leq S(f,Q)\leq S(f,P)$, mientras que de lo demostrado en el caso en que P'-P tenía un solo elemento ($P'-Q=\{z\}$) tenemos $I(f,Q)\leq I(f,P')\leq S(f,P')\leq S(f,Q)$. Entonces $I(f,P)\leq I(f,P')\leq S(f,P')\leq S(f,P)$.

ii) Utilizando convenientemente la parte i) tenemos:

$$I(f,P_1)\leq I(f,P_1\cup P_2)\leq S(f,P_1\cup P_2)\leq S(f,P_2) \qquad \blacksquare$$

I.3. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DADA

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada.

Definición

La integral superior de f es, por definición, el ínfimo del conjunto de las sumas superiores de f, y se representa por $\overline{\int} f$. La integral inferior de f, $\underline{\int} f$, se define como el supremo del conjunto de las sumas inferiores de f:

$$\overline{\int} f = \text{Inf}\ \{S(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

$$\underline{\int} f = \text{Sup}\ \{I(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

donde $\mathcal{P}([a,b])$ es el conjunto de las particiones de [a,b].

Definición

Sea $f:A\to\mathbb{R}$ una función real de variable real, y sean $a,b\in A$ con $a<b$ tal que $[a,b]\subset A$. Si la restricción de f al intervalo [a,b] es acotada, llamaremos integral superior (resp. inferior) de f en [a,b] y notaremos $\overline{\int_a^b} f$ (resp. $\underline{\int_a^b} f$) a la integral superior (resp. inferior) de $f_{/[a,b]}$.

Propiedades

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas. Se verifican:

i) $m(b-a) \le \underline{\int} f \le \overline{\int} f \le M(b-a)$ donde $m=\text{Inf}\{f(x): x\in[a,b]\}$, y $M=\text{Sup}\{f(x): x\in[a,b]\}$

ii) $\overline{\int} -f = -\underline{\int} f$

iii) $\overline{\int} (\lambda f) = \lambda \overline{\int} f$, $\qquad \underline{\int} (\lambda f) = \lambda \underline{\int} f \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_0^+$

iv) $\overline{\int} (f+g) \le \overline{\int} f + \overline{\int} g$, $\qquad \underline{\int} (f+g) \ge \underline{\int} f + \underline{\int} g$

v) Supongamos que $f(x)\le g(x)$ para todo $x\in[a,b]$. Entonces $\overline{\int} f \le \overline{\int} g$, $\underline{\int} f \le \underline{\int} g$

-Dem-

Son consecuencia casi directa de las propiedades de las sumas inferiores y superiores, y de las propiedades de ínfimos y supremos. ■

Parece lógico que, si tomamos particiones con diámetro más y más pequeño (es decir, con diámetro que tienda a cero), las sumas superiores se acercarán más y más a las sumas inferiores. Esto se traduce en que la integral superior coincide con la integral inferior. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es "integrable" (en el sentido de Riemann) sobre [a,b] cuando la integral superior coincida con la inferior, en cuyo caso el número real $\overline{\int} f \leq \overline{\int} g$, $\underline{\int} f \leq \underline{\int} g$ recibe el nombre de integral definida de f, y se denota $\int f$ ó $\int f(x)dx$.

Si queremos indicar el intervalo en el cual f es integrable, denotaremos su integral definida en [a,b] por $\int_a^b f$.

A la función f se le llama "integrando" y a los extremos a y b del intervalo "límites de integración".

Diremos que f es integrable en [a,b] cuando $f_{/[a,b]}$ sea integrable. En tal caso la integral de f en [a,b], denotada como $\int_a^b f$ será la integral de $f_{/[a,b]}$.

El siguiente enunciado caracteriza de dos maneras muy intuitivas a las funciones integrables en un intervalo.

Proposición

Equivalen las siguientes afirmaciones:

1) f es integrable en [a,b]

2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $S(f,P_\varepsilon) - I(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$

3) Existe $\{P_n\}$, $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\} \to 0$

I.4. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Vamos a estudiar por separado las propiedades que se refieren a la función y las propiedades que se refieren al intervalo de integración, obteniendo en cada caso interesantes resultados para el cálculo de la integral definida de una función f.

Propiedades que se refieren a la función

En este punto resumimos el comportamiento de la clase de las funciones integrables respecto a las operaciones del espacio vectorial de las funciones de [a,b] en $\mathbb{R}$.

Proposición

i) Si f,g:[a,b]→$\mathbb{R}$ son funciones integrables, entonces f+g es integrable y se verifica que $\int(f+g)=\int f+\int g$

ii) Si f:[a,b]→$\mathbb{R}$ es una función integrable y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces la función λf es integrable y se tiene que $\int(\lambda f)=\lambda\int f$.

iii) Si f,g:[a,b]→$\mathbb{R}$ son funciones integrables y se verifica que $f(x)\leq g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, entonces se tiene que $\int f\leq\int g$.

iv) Si f:[a,b]→$\mathbb{R}$ es una función integrable, entonces la función |f| es integrable y se verifica $\left|\int f\right|=\int|f|$.

-Dem-

i) Sabemos que $\overline{\int}(f+g)\leq\overline{\int}f+\overline{\int}g=\int f+\int g=\underline{\int}f+\underline{\int}g\leq\underline{\int}(f+g)\leq\overline{\int}(f+g)$ luego como

$\overline{\int}(f+g)=\underline{\int}(f+g)=\int(f+g)$, se tiene que $\int(f+g)=\int f+\int g$.

ii) En el caso en que $\lambda\in\mathbb{R}^+_0$ sabemos que

$\overline{\int}(\lambda f)=\lambda\overline{\int}f=\lambda\int f=\lambda\underline{\int}f=\underline{\int}(\lambda f)$ entonces $\int\lambda f=\lambda\int f$.

Sabemos que $\int -f=-\int f$ como consecuencia de las propiedades de $\underline{\int}f$ y de $\overline{\int}f$,

entonces si $\lambda\in\mathbb{R}^-$ se tiene que $\lambda f=(-\lambda)(-f)$, con $-\lambda\in\mathbb{R}^+$. Entonces $\int\lambda f=(-\lambda)\int -f=-(-\lambda)\int f=\lambda\int f$.

iii) Es consecuencia de las propiedades de $\underline{\int}f$ y de $\overline{\int}f$.

iv) Omitimos la demostración ■

Propiedades que se refieren al intervalo de integración

Intentamos buscar una propiedad de aditividad de la integral con respecto al intervalo.

Proposición

Sea f:[a,b]→ℝ es una función acotada y c∈(a,b). Se tiene:

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \quad ; \quad \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

-Dem-

Notemos $f_1=f_{/[a,c]}$ y $f_2=f_{/[c,b]}$. Queremos probar que

$$\overline{\int} f = \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2 \quad ; \quad \underline{\int} f = \underline{\int} f_1 + \underline{\int} f_2$$

Sean $P_1 \in \mathcal{P}([a,c])$ y $P_2 \in \mathcal{P}[c,b])$ arbitrarias. Es claro que $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}([a,b]$ y que:

$$\overline{\int} f \le S(f,P_1 \cup P_2) = S(f_1,P_1) + S(f_2,P_2)$$

de donde por la arbitrariedad de P_1 y P_2 deducimos que $\overline{\int} f \le \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2$.

Para la desigualdad contraria sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$ arbitraria, $P'=P\cup\{c\}$, $P_1=P=\cap[a,c]$, $P_2=P=\cap[c,b]$. Se tiene claramente que $P_1 \in \mathcal{P}([a,c])$, $P_2 \in \mathcal{P}([c,b])$ y que

$$S(f,P) \ge S(f,P') = S(f_1,P_1) + S(f_2,P_2) \ge \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2$$

de donde por la arbitrariedad de P se tiene que $\overline{\int} f \ge \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2$.

Finalmente, aplicando a la función -f, cuyas restricciones a [a,c] y [c,b] son $-f_1$ y $-f_2$ respectivamente, tenemos $\overline{\int}(-f) = \overline{\int}(-f_1) + \overline{\int}(-f_2)$ esto es $\underline{\int} f = \underline{\int} f_1 + \underline{\int} f_2$. ■

La propiedad que a nosotros nos interesa es:

Corolario

Sea f:[a,b]→ℝ una función acotada y c∈(a,b). Son equivalentes:

i) f es integrable en [a,b]

ii) f es integrable en [a,c] y en [c,b].

En caso de que se verifiquen i) y ii) se tiene: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

-Dem-

Notemos $f_1=f_{/[a,c]}$ y $f_2=f_{/[c,b]}$.

$\underline{i \Rightarrow ii}$ Por hipótesis $\overline{\int} f = \underline{\int} f$, y por la proposición anterior

$$0 = \overline{\int} f - \underline{\int} f = \left(\overline{\int} f_1 - \underline{\int} f_1 \right) + \left(\overline{\int} f_2 - \underline{\int} f_2 \right)$$

Como los dos sumandos del último miembro son no negativos deben ser nulos para que se cumpla la igualdad anterior, es decir, f_1 y f_2 son integrables.

$\underline{ii \Rightarrow i}$ Es consecuencia inmediata de la proposición anterior:

$$\underline{\int} f = \underline{\int} f_1 + \underline{\int} f_2 = \overline{\int} f_1 + \overline{\int} f_2 = \overline{\int} f$$

Finalmente, si f_1 , f_2 y f son integrables, la proposición anterior nos da la igualdad

$$\int f = \int f_1 + \int f_2 \text{, es decir, } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$ ■

De aquí se deduce que $\begin{cases} \int_a^a f = 0 \\ \int_a^b f = -\int_b^a f \end{cases}$

I.5. CONDICIONES SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

Veamos algunos tipos de funciones que siempre son integrables:

<u>Teorema</u>

i) Toda función monótona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable.

ii) Toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable.

-Dem-

i)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente. Se tiene que $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$ $\forall x\in[a,b]$ y por tanto f es acotada.

$\forall n\in\mathbb{N}$ sea $P_n\in\mathcal{P}([a,b])$ la partición

$$P_n = \left\{ a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \ldots\ldots, a+n\frac{b-a}{n} = b \right\}$$

Por ser f creciente, si $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ para k=0,1,...,n se tiene:

$m_k(f,P_n)=f(x_{k-1})$ y $M_k(f,P_n)=f(x_k)$ para todo k=1,....,n

y por tanto, como para cada $k\in\{1,2,...,n\}$, $x_k-x_{k-1}=(b-a)/n$, tenemos:

$$I(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+.....+f(x_{n-1})\right)$$

$$S(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n)\right)$$

de donde $S(f,P_n)-I(f,P_n)=\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$.

Así pues $\{S(f,P_n)-I(f,P_n)\}\xrightarrow{n\to\infty}0$, y f es integrable.

Si f es decreciente, -f es creciente, luego integrable y lo mismo le ocurre a f.

ii) Dado $\varepsilon>0$ vamos a probar que $\exists P_\varepsilon\in\mathcal{P}[a,b]$: $S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$

El teorema de Heine asegura que f es uniformemente continua en [a,b], luego

$$\exists\delta>0:\ \left.\begin{array}{l} x,y\in[a,b] \\ |x-y|<\delta \end{array}\right\}\Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Sea $P_\varepsilon=\{a=x_0,\ x_1,\ ......,\ x_n=b\}$ tal que $x_k-x_{k-1}<\delta,\ \ \forall k$

$$\left.\begin{array}{l} M_k(f,P)=Sup(f[x_{k-1},x_k])=f(v_k) \\ m_k(f,P)=Inf(f[x_{k-1},x_k])=f(u_k) \end{array}\right\}\text{ donde } v_k,u_k\in[x_{k-1},x_k]$$

Como $|v_k-u_k|<\delta\Rightarrow\ f(v_k)-f(u_k)<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, y sumando todos los términos

se deduce que $S(f,P_\varepsilon)-I(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$ ■

Notar que el teorema no es reversible pues hay funciones integrables que no son continuas ni monótonas. Ello puede obtenerse como fácil consecuencia de la proposición siguiente.

<u>Proposición</u>

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable y sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Supongamos que el conjunto $\{x\in[a,b]:\ f(x)\neq g(x)\}$ es finito. Entonces g es integrable y se verifica que $\int f=\int g$.

-Dem-

Sea $c\in[a,b]$ y $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq c\\ 1 & \text{si } x=c\end{cases}$

▪ Si c=a ó c=b, h es monótona luego integrable.

▪ Si $a<c<b$ tenemos que $h_{/[a,c]}$ y $h_{/[c,b]}$ son funciones monótonas, luego integrables, y sabemos que esto implica que h es integrable. Como en cualquier caso $I(h,P)=0$ $\forall P\in\mathcal{P}([a,b])$ tenemos que $\int h=0$.

Sea ahora $A=\{x_1, x_2,\ldots\ldots,x_n\}$ cualquier subconjunto finito de $[a,b]$ y $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función tal que $\varphi(x)=0$ $\forall x\in[a,b]-A$. Para $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ notamos h_k a la función definida por $h_k(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq x_k\\ 1 & \text{si } x=x_k\end{cases}$ tenemos evidentemente que $\varphi=\varphi(x_1)h_1+\varphi(x_2)h_2+\ldots\ldots+\varphi(x_n)h_n$.

Por la primera parte de la demostración, para $k=1,2,..,n$ tenemos que h_k es integrable y que $\int h_k=0$. Entonces φ es integrable y $\int \phi=0$.

Finalmente, si f y g son las funciones del enunciado, podemos aplicar lo anterior a la función $\varphi=g-f$, que cumple que $\varphi(x)=0$ $\forall x\in[a,b]-A$, donde $A=\{x\in[a,b] : f(x)\neq g(x)\}$ que por hipótesis es finito. Entonces g-f es integrable con $\int(g-f)=0$. Entonces g es integrable ($g=f+(g-f)$) con $\int g=\int(g-f)+\int f=\int f$. ■

Esto nos viene a decir que "modificar el valor de una función en un conjunto de puntos finito no varía el valor de la integral".

II. RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE LA INTEGRAL DEFINIDA

Vamos a ver a continuación tres teoremas y una regla. Son especialmente importantes los dos últimos teoremas ya que relacionan la integral definida con la derivada.

■ Teorema de la media o del valor medio del cálculo integral

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe algún punto $h\in[a,b]$ tal que $f(h)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

El significado geométrico de este teorema, para el caso de que la función f sea no negativa, es el siguiente:

"El área bajo la curva f entre a y b es igual al área de un rectángulo de base (b-a) y altura f(h), para algún $h\in[a,b]$." Demostremos el teorema.

-Dem-

Se puede demostrar que si una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces el conjunto imagen, f[a,b] es también un intervalo cerrado.

Puesto que nuestra f verifica estas condiciones, llamemos [m,M] al intervalo cerrado formado por las imágenes f(x) cuando x recorre [a,b] (m y M será el valor mínimo y máximo respectivamente de la función f sobre [a,b]). Entonces:

$m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$, de lo que se deduce que $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f\le M$

Como f es continua en [a,b] por hipótesis, podemos aplicar el teorema de los valores intermedios, que nos dice que f toma todos los valores comprendidos entre m y M , es decir, existe algún punto $h\in[a,b]$ tal que $f(h)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. ■

■ Teorema Fundamental del Cálculo Integral

El Teorema Fundamental del Cálculo es uno de los puntos culminantes de la teoría de funciones reales de variable real.

Antes de enunciarlo vamos a definir un concepto:

Definición: Sea I un intervalo no trivial y sea f una función definida en I. Diremos que f es localmente integrable en I cuando f es integrable en todo compacto contenido en I.

Así por ejemplo toda función continua es localmente integrable.

Teorema (Fundamental del cálculo)

Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable en I, y $a\in I$. Sea $F:I\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\int_a^x f \quad \forall x\in I$. Entonces:

i) F es continua en I.

ii) Si $c\in I$ y f es continua en c, entonces F es derivable en c y F' (c)=f(c). En particular, si f es continua en I, F es derivable en I y F' (x)=f(x) $\forall x\in I$.

-Dem-

i) Comprobemos que F es lipchiciana en todo compacto contenido en I (lo utilizaré más adelante):

Sean s,t∈[c,d]⊆I con t<s.

F(s)-F(t)= $\int_a^s f - \int_a^t f = \int_t^s f$. Entonces:

$$|F(s)-F(t)| = \left|\int_t^s f\right| \leq \int_t^s |f| \leq \sup\{|f(x)| : x \in I(t,s)\}|s\text{-}t| \leq k|s\text{-}t|$$

donde I(t,s)=Intervalo de extremos t y s, y k=sup{$|f(x)|$: $x \in [c,d]$} , lo que significa que F es lipchiciana.

Veamos que F es continua utilizando la caracterización mediante sucesiones. Tendré que probar que:

Si $\alpha \in I$ y $\{x_n\} \to \alpha$ con $x_n \in I$, entonces $\{F(x_n)\} \to F(\alpha)$.

Probémoslo pues:

Considero el conjunto $E = \{x_n : n \in N\} \cup \{\alpha\} \subset I$. Sea c=MínE y d=MáxE. Claramente se tiene que $\alpha, x_n \in [c,d] \subseteq I$.

Como F es lipchiciana se tiene que $|F(x_n) - F(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha| \to 0$ con lo que $\{F(x_n)\} \to F(\alpha)$.

ii) Veamos que F es derivable en todo punto donde f sea continua y además F' (c)=f(c).

Para ello tendré que ver que si f es continua en c∈ I , entonces $\lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$.

$$F(x)-F(c)-f(c)(x-c) = \int_a^x f - \int_a^c f - f(c)(x-c) = \int_c^x f - f(c)(x-c)$$

$$= \left[\text{Truco } f(c)(x\text{-}c)=\int_c^x f(c)\right] = \int_c^x (f-f(c))$$

Por ser f continua en c se tiene que:

Dado ε<0 ∃δ>0 tal que si |t-c|<δ, entonces |f(t)-f(c)|< ε.

Tomo x∈I fijo tal que |x-c|<δ, entonces |f(t)-f(c)|< ε si t está comprendido entre c y x.

Por tanto:

$$|F(x)-F(c)-f(c)(x-c)| = \left|\int_c^x (f(t)-f(c))dt\right| \leq \int_c^x |(f(t)-f(c))|dt \leq$$

$$\leq \sup\{|f(t)-f(c)| : t \in I(x,c)\}|x\text{-}c| < \varepsilon|x-c|$$

Por tanto he demostrado que:

"Si $x \neq c$ con $|x-c|<\delta$ entonces $\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| \leq \varepsilon$ con lo que $\lim_{x \to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$".

■

Definición

A F definida anteriormente se le llama integral indefinida de f con origen en a.

Definición

Sea I un intervalo; f una función definida en I. Una primitiva de f es cualquier función F continua en I, derivable en el interior de I tal que F' (x)=f(x) $\forall x \in \text{int}(I)$.

Una condición necesaria para que f tenga primitivas en I es que f tenga la propiedad del valor intermedio (lleve intervalos en intervalos) en int(I), ya que las funciones que son derivadas de alguna otra función tienen esta propiedad. Además f no puede tener discontinuidades evitables ni de salto en int(I) (por la misma razón).

Es interesante resaltar que los conceptos "tener primitiva" y "ser integrable" no están relacionados. Así por ejemplo:

● Hay funciones con primitiva que no son integrables:

Si $h(x)=x^2 \text{sen}\frac{1}{x^2}$ y h(0)=0, entonces:

$h'(x)=2x\,\text{sen}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ y h'(0)=0.

Si llamo f=h' se tiene que h es una primitiva de f en p.e [-1,1].

En cambio f no es integrable pues si $x \to 0$ f no esta acotada.

● También hay funciones integrables que no tienen primitiva como puede ser cualquier función monótona en un compacto con discontinuidades.

NOTA: El teorema Fundamental del Cálculo nos dice en particular que toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

■ Regla de Barrow

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y supongamos que admite primitivas en [a,b]. Sea G una primitiva. Entonces $\int_a^b f = G(b)-G(a)$.

-Dem-

Sea $P=\{x_0,x_1,.....,x_n\}$ cualquier partición del intervalo [a,b].

Para cada $k\in\{1,2,..,n\}$ podemos aplicar el teorema del valor medio a la restricción de G al intervalo $[x_{k-1},x_k]$, obteniendo $t_k\in(x_{k-1},x_k)$ tal que:

$$G(x_k)-G(x_{k-1})=G'(t_k)(x_k-x_{k-1})=f(t_k)(x_k-x_{k-1})$$

Así se tiene que:

Como $I(f,P)\leq\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left(G(x_k)-G(x_{k-1})\right)=G(b)-G(a)\leq S(f,P)$

se tiene que $I(f,P)\leq G(b)-G(a)\leq S(f,P)$

y esto es válido para cualquier partición P del intervalo [a,b], luego tenemos que $\underline{\int_a^b} f(t)dt\leq G(b)-G(a)\leq\overline{\int_a^b} f(t)dt$

Por ser f integrable se tiene que $\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)$. ■

Ejemplo

Calculemos $\int_{4-e}^{3}\frac{1}{x-4}dx$. En primer lugar, debemos asegurarnos de que el integrando es una función continua en el intervalo [4-e,3]. Para ello , observemos que la función 1/(x-4) es continua en todos los puntos x excepto en x=4. Y como el punto x=4 no pertenece al intervalo [4-e,3], la función del integrando es continua sobre el intervalo de integración. En consecuencia, podemos aplicar la regla de Barrow, quedando:

$$\int_{4-e}^{3}\frac{1}{x-4}dx=[\log|x-4|]_{4-e}^{3}=\log 1-\log e=1.$$

■ Fórmula de cambio de variable

Sea $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en [a,b]. Sea f una función continua en un intervalo I de forma que $\phi\,[a,b]\subseteq I$. Entonces:

$$\int_a^b(f\circ\phi).\phi'=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)}f\ .$$

-Dem-

Sea G una primitiva de f en I. Entonces

$$(G\circ\phi)'=[\text{R. cadena}]=(G'\circ\phi)(\phi')=(f\circ\phi)\phi'$$

Aplicando la R. de Barrow obtenemos:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = G(\phi(b)) - G(\phi(a)) = (G\circ\phi)(b) - (G\circ\phi)(a) = \int_a^b (f\circ\phi)\phi' \qquad \blacksquare$$

La estrategia que se sigue cuando aplicamos esta fórmula es la siguiente:

$$\int_c^d f(x)dx = \begin{bmatrix} x=\phi(t) & dx=\phi'(t)dt \\ \phi(a)=c & \phi(b)=d \end{bmatrix} = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

<u>Ejemplo</u>

$$\int_4^5 (2x-1)^3dx = \begin{bmatrix} x=\dfrac{t+1}{2}, & dx=dt/2 \\ 5=\dfrac{9+1}{2}, & 4=\dfrac{7+1}{2} \end{bmatrix} = \int_7^9 t^3\frac{dt}{2} = \left[\frac{t^4}{8}\right]_7^9 = 520$$

III. CÁLCULO DE ÁREAS

Como es complicado dar una definición formal del concepto de área que se adapte al concepto intuitivo, se suele tomar como definición de área la siguiente:

"Si $f(x)\geq 0$, y f es continua en [a,b], entonces $\int_a^b f$ representa el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva y=f(x), las rectas x=a y x=b, y el eje de las abscisas."

Esta definición quedó justificada cuando vimos la interpretación geométrica de las sumas inferiores y superiores y la posterior definición de integral definida.

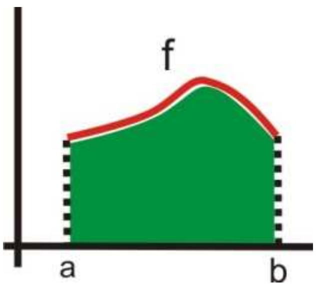
En el caso en que f no sea mayor a igual que 0, veremos como se define el área.

Con esta definición vamos a ver como se calculan áreas en distintos casos:

1. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en [a,b]. Queremos calcular el área del recinto delimitado por la gráfica f, el eje horizontal y las rectas x=a y x=b. Distinguiremos casos según el signo de f.

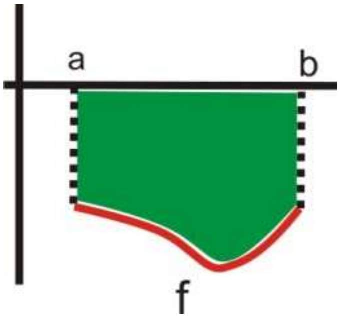
a) Si $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$:

Área= $\int_a^b f(x)dx$



b) Si $f(x) \le 0, \ \forall x \in [a,b]$:

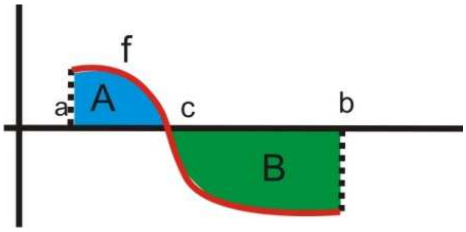
$$\text{Área} = -\int_a^b f(x)dx$$



c) Si $f(x) \ge 0, \ \forall x \in [a,c]$ y $f(x) \le 0, \ \forall x \in [c,b]$, siendo c un punto comprendido entre a y b:

Área total=Área (A) + Área(B)=

$$= \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$



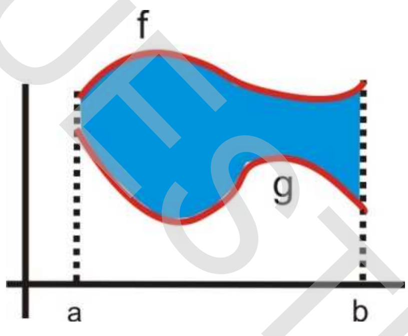
NOTA: Observemos que en este último caso el recinto está descompuesto en dos partes, una con $f \ge 0$ y otra con $f \le 0$ y calculamos el área de cada parte por separado. Se procedería de forma análoga para calcular el área de recintos similares.

2. Sean $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ y $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en [a,b]. Queremos hallar el área del recinto delimitado por las gráficas de f y g y las rectas x=a y x=b.

a) Si $f(x) \ge g(x) \ \forall x \in [a,b]$:

Área=

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



b) Si se cumpliera la condición $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, estaríamos en una situación similar, pero con los papeles de f y g cambiados.

c) En el caso general, el recinto se descompone de forma que en cada una de las partes se verifique o bien $f \ge g$ o bien $f \le g$ y se calcula el área de cada parte por separado.

IV. BIBLIOGRAFÍA

■ Aparicio del Prado, C y Payá Albert, R. **Análisis matemático**. Universidad de Granada, 1996

■ Berberian, S. K. **A First Course in Real Analysis**. Springer-Verlag, New York, 1994

■ Pivak, M.S. **Cálculo Infinitesimal**. Reverte, Barcelona 1992

■ Pérez González, J. **Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una variable**.

■ Abbott, S. **Understanding Analysis**. Springer-Verlag, New York, 2001

■ M. de Guzmán, B. Rubio. **Análisis matemático**. Editorial Pirámide.

■ J.A. Fernández Viña. **Análisis matemático I**. Editorial Tecnos.