TEMA 50: INTRODUCCIÓN A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDEAS. GEOMETRÍA ESFÉRICA.

TEMA 50: INTRODUCCIÓN A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDEAS. GEOMETRÍA ESFÉRICA.

La geometría como palabra tiene dos raíces griegas: geo=tierra y metría=medida; o sea, significa "medida de la tierra". En este tema hablaremos sobre los geometrías no euclídeas, pero para ello debemos saber que son en primer lugar las geometrías euclídeas. Su nombre proviene de famoso geómetra por excelencia del periodo griego, Euclides (hacia el año 300 a. C.). Éste hace la construcción más importante de la metodología de la ciencia en la Antigüedad, al presentar en la formulación de sus *"Elementos"* la primera Axiomatización en la historia de las matemáticas. El escrito los *"Elementos"* representa y caracteriza la Geometría en el período que va desde la Antigüedad hasta la Época Moderna. Los "Elementos" se componen de 13 libros con un total de 465 proposiciones: 93 problemas y 372 teoremas. En esta obra, Euclides recoge todo el saber geométrico y aritmético, exponiéndolo de manera rigurosa a partir de cinco axiomas o postulados geométricos y ocho nociones comunes. Dichos axiomas son:

A.1. Por dos distintos puntos pasa una única recta.

A.2. Un segmento rectilíneo puede ser prolongado

A.3. Hay una única circunferencia con un centro y diámetro dados.

A.4. Todos los ángulos rectos son iguales.

A.5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en éste mismo lado. (Conocido como el postulado de las paralelas).

Este 5º axioma, a lo largo de la historia, toma muchos enunciados equivalentes y es el culpable de la aparición de las geometrías no euclídeas, que más tarde estudiaremos. Para estudiarlas seguiré el esquema expuesto anteriormente.

I. INTRODUCCIÓN A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDEAS

Sin duda alguna fueron las ***geometrías no euclídeas*** las que atrajeron a la mayoría de los geómetras de los siglos XIX y XX. Hasta esa fecha Los Elementos de Euclides había sido considerado como la Biblia de las Matemáticas. El punto de partida de este libro fue la consideración entre otras cosas de los cinco postulados o axiomas particulares en los que se fundamentaba toda la Geometría.

Los postulados adoptados por Euclides se consideraron durante cientos de años verdades evidentes acerca del espacio físico y de las figuras que hay en él. Sin embargo, el 5º postulado, también llamado de las paralelas, era demasiado complicado y poco elegante en comparación con el resto.

Es por ello que muchos matemáticos del siglo XIX se preguntaron si el 5º postulado de Euclides era tal postulado. Para ello se marcaron dos caminos:

- Reemplazar el postulado de las paralelas por otro más sencillo y evidente.
- Tratar de deducirlo de los restantes postulados.

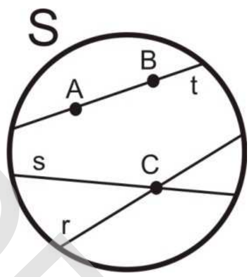
El primero de los caminos llevó a enunciados como: "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos" o "existe una única recta que pasa por cierto punto y que es paralela a una dada".

El segundo camino es el que dio lugar a las geometrías no euclídeas. Las geometrías no euclídeas surgen como consecuencia del vano intento de demostrar el 5º postulado de Euclides. Fueron entre otros **Legendre y Lambert** los que en este siglo, para profundizar en la significación del postulado de las paralelas habían revelado tres vías posibles: una se basaba en el postulado y conducía evidentemente a la geometría euclídea; las otras dos, en formas opuestas, se fundamentaban en el rechazo del postulado, lo que dejaba vislumbrar la posibilidad de elaborar nuevas geometrías, las geometrías no euclídeas.

En 1927 **Gauss**, llegó no solo a la conclusión de que era imposible demostrar tal postulado, sino a que tal demostración llevaría a una geometría muy diferente de la de Euclides. Gauss disponía pues de los principios de una nueva geometría, fundamentaba en la hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos (que es equivalente a la existencia de un número infinito de paralelas que se pudieran trazar a una recta dada por un punto exterior a esa recta.)

Por esa misma época **Bolyai** y **Lobachevsky** realizaban el mismo descubrimiento. Esta primera geometría no euclídea recibió el nombre de *"hiperbólica".* La gran novedad de estos matemáticos fue la de caer en la cuenta de que la geometría euclídea no es la única geometría que describe las propiedades del espacio físico.

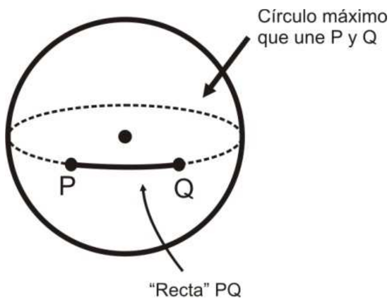
Un modelo de esta geometría nos lo proporciona el interior de un círculo S en el plano euclídeo. En este modelo un "punto" es un punto interior a S y una "recta" que pasa por dos puntos es el intervalo abierto de la recta euclídea que pasa por esos puntos y está en el interior del círculo.



Es fácil demostrar que los 4 primeros postulados de Euclides se verifican en este modelo. Evidentemente no sucede así con el postulado de las paralelas, ya que por un punto pasan "muchas" rectas paralelas a una dada. Así por ejemplo r y s son paralelas a t ya que no cortan a t.

Gracias a la publicación de las notas de Gauss en 1855, esta nueva geometría fue difundida gradualmente. Se dio otro paso hacia el reconocimiento de esta geometría cuando **Riemann** publicó, en 1868, el segundo tipo de geometría no euclídea, que corresponde al caso en que la suma de los ángulos de un triángulo es superior a dos rectos (equivalentemente, desde un punto exterior a una recta no existen paralelas a ellas), y que fue conocida por *"geometría elíptica".* Fue introducida de manera explícita por Klein en 1871.

Un modelo para la geometría elíptica nos los da la esfera, y lo llamaremos geometría esférica. En la superficie esférica se puede reinterpretar la "línea recta" como la distancia más corta entre dos puntos y es el arco de círculo máximo que une dichos puntos. Se puede comprobar que dos rectas se cortan siempre, luego por un punto no pasa ninguna recta paralela a otra recta dada.



Más adelante estudiaremos con más detalle la geometría esférica.

Para completar el cuadro queda, la geometría *parabólica*, nuestra geometría euclídea, en la que la paralela desde un punto exterior a una recta es única (que es igual que el 5º postulado de Euclides).

La cuestión fundamental era saber si esas geometrías podían clasificarse como una rama legítima de las matemáticas, es decir, si eran consistentes. La respuesta la dio **Klein** con su célebre *"Programa de Erlangen"* en el que presentó una clasificación de las geometrías fundamentada en la geometría proyectiva. En esta clasificación cada geometría es la teoría de los invariantes de un grupo particular de transformaciones. Por ejemplo, la geometría euclídea es el estudio de los invariantes del grupo métrico. Aquí Klein estableció claramente que los tres tipos de geometrías no euclídeas, la parabólica, hiperbólica y elíptica, eran casos correspondientes a los tres tipos posibles de geometrías proyectivas de curvatura constante.

Después de 1880 se emprende la difícil tarea de instaurar el rigor en los fundamentos de la geometrías, y ésta será la preocupación de algunos matemáticos como **Klein, Peano, Hilbert, Pieri,...**

II. GEOMETRÍA ESFÉRICA

II.1. LA ESFERA

La esfera se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo llamada **centro** una cantidad constante llamada **radio**.

Un punto del espacio de coordenadas (x,y,z) pertenece a una esfera de radio R y centro $O(x_0,y_0,z_0)$ si verifica que:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\alpha\cos t \\ y = R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,t \\ z = R\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{array}\right\} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

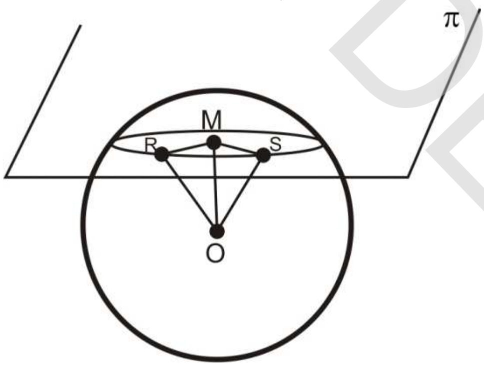
Estudiemos una propiedad importante.

Proposición

El plano π determinado por tres puntos de la superficie esférica corta a la esfera en una circunferencia.

-Dem-

Consideramos la curva C intersección del plano y la esfera. Llamamos O al centro de la esfera.



Consideramos ahora la recta ortogonal a π que pasa por O y llamamos M al punto de la intersección de esa recta con π.

Para demostrar que la curva C es una circunferencia de centro M se toman dos puntos cualesquiera R y S de C y comprobamos que equidistan de M.

Efectivamente, los triángulos OMR y OMS son rectángulos en M; tienen un cateto común OM y las hipotenusas OR y OS son iguales por ser el radio r de la esfera. Por tanto MR=MS, con lo que queda demostrado que C es una circunferencia de centro M. ■

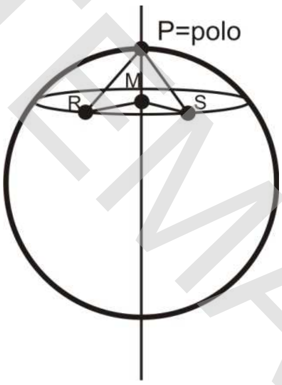
II.2. MEDIDAS ESFÉRICAS

II.2.A. CÍRCULOS MÁXIMOS/ CÍRCULOS MENORES. DISTANCIA ESFÉRICA.

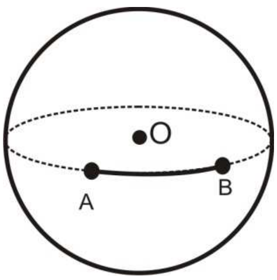
Hemos visto que un plano al cortar a la esfera determina sobre la superficie de la misma una circunferencia. Abusando del lenguaje a estas circunferencia se les llama también círculos.

Si el plano pasa por el centro de la esfera determina un **círculo máximo o ciclo**. A los restantes círculos se les llama **círculos menores**.

Todo círculo situado en una esfera determina un **diámetro** de ésta, que es la recta perpendicular al plano que contiene al círculo y que pasa por su centro. Los puntos donde este diámetro corta a la superficie se llaman **polos** del círculo.



Es fácil ver que todos los puntos de un círculo equidistan de sus polos. Para demostrarlo se considera el círculo C de centro M y sus dos polos P y P'; R y S puntos sobre el círculo C. Como los triángulos PMR y PMS son rectángulos en M y además tienen un cateto común PM, y los otros dos catetos MR y MS son iguales por ser el radio del círculo C, entonces las hipotenusas PR y PS son también iguales, con lo tenemos lo que queríamos.



Ahora podemos pensar en como definir la distancia entre dos puntos de la esfera. Pues bien, si consideramos una esfera de centro O y dos puntos A y B situados sobre la superficie de la esfera, estos tres puntos determinan un plano que corta a la esfera en un círculo máximo, como se observa en la figura.

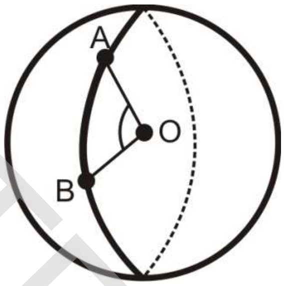
La medida del arco AB situado sobre el círculo máximo es la distancia esférica entre los puntos A y B.

Obsérvese que los círculos máximos juegan en la geometría esférica el mismo papel que las rectas en la geometría plana.

<u>Observación</u>: Si A y B fuesen diametralmente opuestos, habría infinitas circunferencias máximas que pasan por ellos, y todos los arcos AB serían iguales a una semicircunferencia que se toma, en este caso, por definición, como la distancia esférica.

II.2.B. MEDIDA DE LONGITUDES ESFÉRICAS

Como todas las circunferencia máximas tienen el mismo radio, las distancias esféricas son proporcionales a los ángulos que las proyectan desde el centro de la esfera.



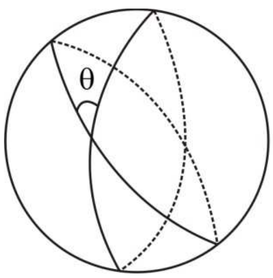
Así se explica el hecho de que en la geometría esférica puedan compararse entre sí longitudes y ángulos, lo cual no ocurre en la geometría plana. Por tanto la medida de la distancia AB es la medida del ángulo $A\hat{O}B$. (A este ángulo lo llamaremos ángulo central).

Como unidad de longitud suele tomarse "1 grado" y éste a su vez se divide sexagesimalmente. También se usa la llamada "medida natural" o radián, siendo éste equivalente a la medida del ángulo que determina un arco de círculo máximo de longitud igual al del radio de la esfera=radio del círculo máximo.

II.2.C. ÁNGULOS Y HUSOS ESFÉRICOS

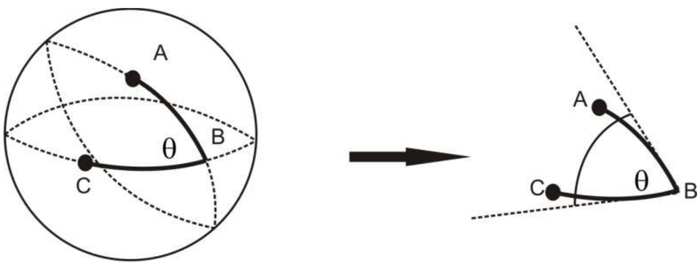
Dos circunferencias máximas dividen a la esfera en cuatro regiones, correspondientes a los cuatro DIEDROS en que los planos de esas circunferencias dividen al espacio.

Cada una de estas cuatro regiones de la esfera se llama **huso esférico**. Se toma como medida de un huso el ángulo que forman las circunferencias máximas que lo limitan. A este ángulo se le llama ángulo diedro.



θ = Ángulo diedro que determinan los dos círculos máximos

El problema está en saber medir este ángulo diedro. Fijémonos en el dibujo:



Se define el **ángulo entre los dos círculos máximos** como el ángulo plano que forman las rectas tangentes a los arcos AB y CB en el punto B.

De esta forma se dice que dos circunferencias máximas son perpendiculares cuando formen un ángulo recto.

Recordemos que una circunferencia C máxima determina un diámetro de la esfera cuyos extremos se denominan polos de C. En ellos concurren todas las circunferencias máximas perpendiculares a C, puesto que todos los planos perpendiculares al plano de C por el centro de la esfera pasan por el diámetro perpendicular a C.

Desde un punto A de la superficie esférica, exterior a una circunferencia máxima C y distinto de los polos de ésta, se puede trazar una única circunferencia máxima perpendicular a C: será la que pasa por A y por los dos polos de C, es decir, contenida en el plano perpendicular al de C que pasa por el punto A.

Hallemos el área de un huso:

Si llamamos θ (en radianes) al ángulo diedro que determinan los círculos máximos es evidente que el área del huso es proporcional a este ángulo. Por ello tenemos que la relación entre el área del huso y el área total es igual a la relación entre θ y 2π:

$$\frac{\text{área del huso}}{\text{área de la superficie de la esfera}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

es decir,

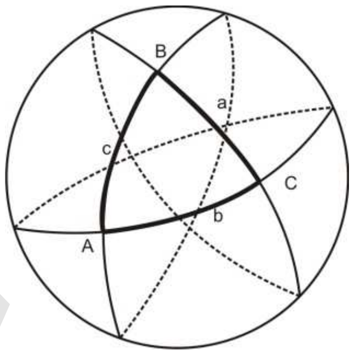
$$\text{área huso} = 4\pi R^2 . \frac{\theta}{2\pi} = 2R^2\theta$$

donde R es el radio de la esfera considerada.

II.3. TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

II.3.A. DEFINICIÓN, CLASIFICACIÓN Y PROPIEDADES

Se denomina **triángulo esférico** a la figura ABC en la superficie de la esfera, formada por los arcos de tres círculos máximos.



A los puntos A, B y C se les llama **vértices** del triángulo esférico.

A los arcos AB, AC y BC se les llama **lados** del triángulo esférico, y se miden por sus ángulos centrales. A los lados se les designa por la misma letra que el vértice opuesto, pero en minúscula.

Los ángulos de un triángulo esférico son los que forman sus lados.

Podemos clasificar los triángulos esféricos como sigue:

- Isósceles, y equiláteros si tienen dos, y tres lados iguales respectivamente.
- Rectángulo, birrectángulo, trirrectángulo si tienen uno, dos, y tres ángulos diedros rectos respectivamente.

Enunciemos algunas propiedades de los triángulos esféricos:

Propiedades

1) La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que 360º (4 rectos). (La medida de un lado lo estudiamos en II.2.B).

2) Cada lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.

3) La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180º (2 rectos) y menor que 540º (6 rectos). (La medida de ángulos los estudiamos en II.2.C)

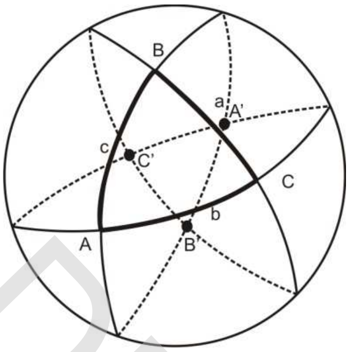
4) En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

II.3.B. ÁREA DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO

También resulta interesante saber cual es el área de un triángulo esférico ABC. Para ello tenemos que definir un nuevo concepto:

Llamamos *exceso de un triángulo* esférico a la diferencia entre la suma de los ángulos de un triángulo esférico y π: $E=A+B+C-\pi$ (los ángulos en radianes)

Consideremos un triángulo esférico cualquiera ABC como el de la figura. Si dibujamos los círculos máximos que dan lugar a este triángulo obtenemos:



Llamamos $\triangle ABC$ al área del triángulo ABC. Utilizando la fórmula que ya obtuvimos para el área de un huso podemos escribir:

- Área del huso ABA'CA= $2R^2A \Rightarrow \triangle ABC+\triangle A'BC=2R^2A$ (1)
- Área del huso BCB'AB=$2R^2B \Rightarrow \triangle ABC+\triangle B'CA=2R^2B$ (2)
- Área del huso CAC=BC=$2R^2C \Rightarrow \triangle ABC+\triangle C'AB=2R^2C$ (3)

Sumando (1), (2) y(3) obtenemos:

$$2\triangle ABC+(\triangle ABC+\triangle A'BC+\triangle B'CA+\triangle C'AB)=2R^2(A+B+C)$$

Sin embargo por la simetría de la esfera, es evidente que $\triangle B'CA=\triangle BC'A'$ y por tanto:

$$2\triangle ABC+(\triangle ABC+\triangle A'BC+\triangle BC'A'+\triangle C'AB)=2R^2(A+B+C)$$

Los triángulos ABC, A'BC, BC'A' y C'AB forman un hemisferio, por lo que

$$2\triangle ABC+2\pi R^2=2R^2(A+B+C) \Rightarrow \triangle ABC=R^2(A+B+C-\pi)$$

Pero $(A+B+C-\pi)$ es precisamente el exceso (E) del triángulo ABC y por tanto:

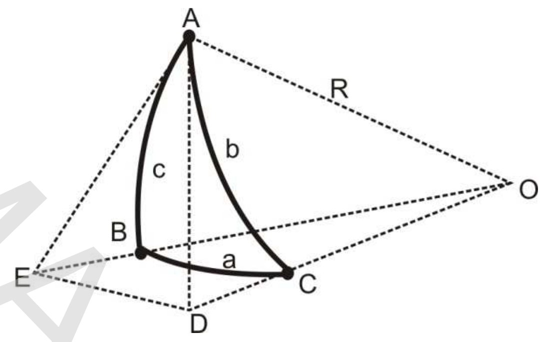
- **$\triangle ABC=R^2E$** (expresado en radianes)
- **$\triangle ABC=\pi R^2E/180$** (expresado en grados)

donde R es el radio de la esfera.

II.3.C. TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA: FÓRMULA DE BESSEL

Estudiemos algunas de las posibles relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico.

Tomemos el triángulo esférico ABC de la figura, formado en la esfera de radio R y centro O.



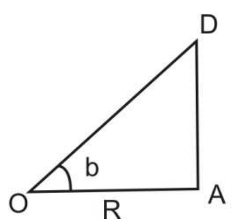
Desde el vértice A trazamos las tangentes AD y EA a los lados b y c hasta su intersección con las prolongaciones de los radios OC y OB. Uniendo con una recta los puntos de intersección D y E obtendremos dos triángulos oblicuángulos planos ADE y ODE con un lado común DE. Aplicando a estos triángulos el teorema del coseno de geometría plana, escribiremos:

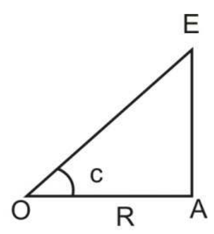
$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD.OE.\cos a$$
$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD.AE.\cos A$$

Restando la segunda igualdad a la primera obtenemos:

$$2OD.OE.\cos a = OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 + 2AD.AE.\cos A \qquad (1)$$

De los triángulos rectángulos (por construcción lo son) OAE y OAD se deduce:





$$OD^2 - AD^2 = R^2; \quad OE^2 - AE^2 = R^2;$$

$$AD=R\,tgb; \quad AE=R\,tgc \quad OD=\frac{R}{\cos b}; \quad OE=\frac{R}{\cos c}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (1) y efectuando las correspondientes simplificaciones obtenemos:

$$\cos a=\cos b.\cos c+\text{sen } b.\text{sen } c.\cos A \qquad (2)$$

es decir, *el coseno del lado del triángulo esférico es igual al producto de los cosenos de sus otros dos lados más el producto de los senos de estos mismos lados por el coseno del ángulo entre ellos.*

La fórmula (2) también se puede escribir para los lados b y c. Vamos a escribirla, por ejemplo, para el lado b:

$$\cos b=\cos a.\cos c+\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} c.\cos B$$

y sustituyendo en ella el "cos a" de la fórmula (2) obtenemos:

$$\cos b=(\cos b.\cos c+\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c.\cos A)\cos c+\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} c.\cos B$$

Eliminando paréntesis y traspasando el primer término del segundo miembro, al primer miembro tendríamos:

$$\cos b(1-\cos^2 c)=\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c.\cos c.\cos A+\operatorname{sen} c.\operatorname{sen} a.\cos B$$

Además sabemos que $1-\cos^2 c=\operatorname{sen}^2 c$

Simplificando todo por sen c obtendremos definitivamente:

$$\operatorname{sen} a.\cos B=\operatorname{sen} c.\cos b-\cos c.\operatorname{sen} b.\cos A \quad (3)$$

es decir, *el producto del seno del lado por el coseno del ángulo adyacente es igual al producto del seno del otro lado, que limita con el ángulo adyacente, por el coseno del tercer lado menos el producto del coseno del lado, que limita con el ángulo adyacente, por el seno del tercer lado y por el coseno del ángulo opuesto al primer lado.*

La fórmula (3) se denomina fórmula de los cinco elementos. Ella se puede escribir también por analogía para los productos sena.cosC, senb.cosA, senb.cosC, sen c.cosA y sen c.cosB.

Vamos a obtener ahora una nueva relación, que además resulta ser muy interesante. Para ello resolvamos la igualdad (2) respecto al cosA:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b.\cos c}{\operatorname{sen} b.\operatorname{sen} c}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y restándolos a la unidad obtenemos:

$$1-\cos^2 A=\frac{\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c-(\cos a-\cos b.\cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b.\operatorname{sen}^2 c}$$

Después de suprimir los paréntesis (uso que $sen^2 b sen^2 c=(1-cos^2 b)(1-cos^2 c)$) y dividir ambos miembros por $sen^2 a$ tenemos:

$$\frac{sen^2 A}{sen^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a.\cos b.\cos c}{sen^2 a.sen^2 b.sen^2 c}$$

El segundo miembro de la expresión obtenida es absolutamente simétrico respecto a, b, y c.

Si repetimos es proceso, pero esta vez partiendo de las otras dos fórmulas de (2) obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{senA}{sena}=\frac{senB}{senb}=\frac{senC}{senc}=constante \quad (4)$$

Los tres conjuntos de fórmulas (2), (3), y (4) se conocen **como fórmulas de Bessel**. Con todas estas fórmulas tenemos bastantes para poder trabajar, aunque claro está a partir de estas podemos hallar otras muchas otras.

II.4. SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LA GEOMETRÍA DEL PLANO Y DE LA ESFERA.

Traduciendo segmentos por arcos de circunferencia máxima, ángulo plano por ángulo esférico, semiplano por hemisferio,..., observamos una similitud entre ciertas propiedades de la geometría plana y de la geometría esférica.

Sin embargo, la discordancia es manifiesta en aquellas propiedades en que interviene el carácter abierto de la recta, los puntos comunes a dos rectas y la noción de paralelismo. Por ejemplo:

- Dos rectas en el plano sólo pueden tener un punto en común. En la esfera 2 circunferencias máximas tienen siempre 2 puntos comunes.
- Dos perpendiculares a una recta, en el plano son paralelas; en la esfera, dos circunferencias máximas perpendiculares a otra se cortan en los polos de ésta. El paralelismo entre circunferencias máximas no existe.
- En el plano, la suma de los ángulos de un triángulo es 2 rectos; en la esfera es mayor que 2 rectos.
- En el plano, 2 triángulos de ángulos iguales son semejantes; en la esfera son iguales.

Así, las propiedades de las figuras trazadas sobre la superficie esférica proporcionan un ejemplo de Geometría que puede edificarse autónomamente partiendo de los conceptos de punto y recta esférica.

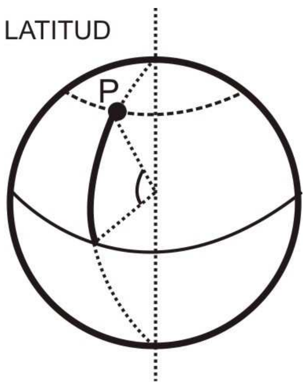
II.5. APLICACIONES DE LA GEOMETRÍA ESFÉRICA: COORDENADAS TERRESTRES.

La Tierra tiene forma aproximadamente esférica. A cada punto de ella le podemos asignar unas coordenadas utilizando lo ya estudiado en este tema. Veamos como:

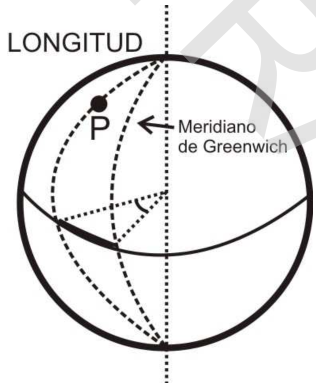
Se denomina *eje de la Tierra* a la línea imaginaria que la cruza de norte a sur y alrededor de la cual se considera que gira el planeta. *Ecuador* es el círculo máximo del Globo Terrestre perpendicular al eje de la Tierra y equidistante entre los dos polos, dividiendo a la Tierra en el Hemisferio Norte y el Hemisferio Sur.

A los semicírculos máximos (180º), cuyos extremos coinciden con los polos, se les denomina *meridianos*. Todos los meridianos tienen dirección Norte-Sur, y tienen su máxima separación en el Ecuador. Su número es infinito, aunque para su consideración en el mapa se seleccionan separados por distancias iguales (111 km).

Los *paralelos* son círculos menores obtenidos por la intersección del Globo con planos paralelos al Ecuador. Su separación es constante. Siempre van de Oeste a Este. Cortan a los meridianos formando un ángulo esférico recto.



La *latitud* es la distancia angular entre el Ecuador y un punto (P) determinado de la Tierra , medida a lo largo del meridiano en el que se encuentra dicho punto. Puede oscilar entre 0º en el Ecuador y 90º en los polos, en sentido Norte o Sur.



Por otra parte por el punto P pasa un único meridiano. Al ángulo que forma este meridiano con el meridiano 0 o de Greenwich (es el que pasa por Castellón), medido en el Ecuador, lo llamaremos *longitud* del punto P. La longitud oscila entre 0º y 180º al Este o al Oeste.

Por tanto cualquier punto del Globo puede situarse con referencia a dos líneas fijas, el Ecuador y el Meridiano 0, dando su longitud y su latitud.

Al conjunto de líneas que permitirán determinar la situación de un punto sobre la superficie terrestre lo llamaremos *red geográfica*.

En resumen podemos concluir diciendo que sin más que modificar los postulados de Euclides nacieron las geometrías no euclídeas y luego un sinnúmero de otras geometrías que aparecían con sólo sustituir los postulados por otros. Especial mención tiene un tipo de geometría elíptica, la geometría esférica, debido a que la Tierra forma de esfera.

III. BIBLIOGRAFÍA

■ Moreno-Amelia, L. **El postulado de las paralelas**. Revista Acad. Colomb. Cienc, Vol. 22 número 84, 1998

■ Montesinos, J.M. **Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevsky, Bolyai.** Historia de la Matemática, 1992

■ Santaló, L.A . **Geometrías no euclidianas.** Universitaria de Buenos aires. Buenos Aires, 1961

■ Anderson, James W. **Hyperbolic Geometry**. Springer, 2005