TEMA 1: NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

TEMA 1: NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

El concepto de número es tan antiguo como la matemática misma. Incluso podría decirse que más antiguo que ésta, ya que, desde sus orígenes, el hombre ha sabido distinguir los conceptos de uno, dos y varios.

Observando la naturaleza, el hombre reparó en las diferencias pero también en las semejanzas entre los objetos, llegando, por ejemplo, a que una oveja y rebaño tienen en común su unidad. Asimismo, el concepto de pareja o "dos" debió surgir al observar la relación entre los ojos, las manos, los pies,.. De esta manera se fue creando la idea abstracta de número cardinal.

Posteriormente, el hombre debió sentir la necesidad de representar de alguna manera esta propiedad de contar. En un principio lo haría con los dedos, de ahí que la base diez sea una de las más utilizadas por distintas culturas. A medida que el cardinal de los conjuntos fue mayor, el hombre no tuvo suficiente con los dedos de las manos. Es probable que utilizase piedras (cálculos, de ahí el nombre de Cálculo), trazos en la arena …, y más tarde métodos más duraderos como muescas en palos o huesos.

El siguiente paso en la evolución de las "matemáticas" consiste en pasar de estos métodos a asignar un signo específico para todos los conjuntos que tuviesen el mismo cardinal. Aquí aparecen los sistemas de numeración. Este proceso fue bastante lento y resulto de muy distinta manera por las diferentes culturas.

En este tema desarrollaré los aspectos fundamentales en la construcción del conjunto de los números naturales y los distintos tipos de sistemas de numeración siguiendo el esquema expuesto anteriormente.

I. EL NÚMERO NATURAL

I.1. DEFINICIÓN. AXIOMAS DE PEANO

A pesar de lo "intuitivo" del concepto de número natural, a finales del siglo XIX se vio la necesidad de dar una definición de número cardinal, ya que a partir de éste se definían el resto de los números (enteros, racionales, reales y complejos).

Frege dio la siguiente definición, basada en la teoría de conjuntos de Boole y Cantor:

"Se define el número cardinal de un conjunto dado, finito o infinito, como la clase de todos los conjuntos que son semejantes al conjunto dado, entendiendo semejantes como que los elementos de los dos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca".

Por esa misma época (finales del siglo XIX) Peano intentó desarrollar un lenguaje formalizado en el que se pudieran expresar todas las ramas de la matemática. Usó símbolos sencillos como $\in$, $\bigcup$, $\bigcap$ …

<u>Axiomas de Peano</u>

Se define el conjunto de los números naturales, y se representa por $\mathbb{N}$, como el conjunto que verifica:

1. Cero (0) es un número natural.
2. Para cada $x \in \mathbb{N}$ existe uno y sólo un número natural llamado sucesor o siguiente de x, que representamos por x'. Al siguiente de cero se le llama uno (1).
3. Cero no es el siguiente de ningún número.
4. Si los siguientes de dos números son iguales, entonces los dos números son iguales.
5. Si un conjunto contiene al cero y también al siguiente de cualquier número que pertenezca a él, entonces todo número pertenece al conjunto. (Axioma de inducción completa)

Como consecuencia directa de los axiomas se obtienen las siguientes propiedades:

i) Si $x,y \in \mathbb{N}$ son tales que $x \neq y$, entonces $x' \neq y'$.

ii) Para todo $x \in \mathbb{N}$ se tiene que $x' \neq x$.

iii) Si $x \in \mathbb{N}$-{0}, existe un único $u \in \mathbb{N}$ tal que $x=u'$.

I.2. OPERACIONES ARITMÉTICAS

(Se definirán las diferentes operaciones haciendo uso de la definición axiomática de Peano.)

► SUMA O ADICIÓN

A cada par de números naturales x, y le asignamos otro número natural que representamos por x+y, tal que:

a) $x+0=x$, $\forall x\in \mathbb{N}$

b) $x+y' = (x+y)'$, $\forall x,y\in \mathbb{N}$

El número natural x+y se llama suma de x con y. A los números x e y se les llama sumandos.

Vamos a comprobar que la definición es buena.

<u>Teorema</u>

i) Para cada $x\in \mathbb{N}$ hay a los sumo una forma de definir x+y $\forall y\in \mathbb{N}$, de forma que se verifiquen a) y b) (unicidad).

ii) $\forall x,y\in \mathbb{N}$ es posible definir x+y (existencia)

-Dem-

i) Supongamos que dado $x\in \mathbb{N}$ existen $h(y)$, $k(y)\in \mathbb{N}$ $\forall y\in \mathbb{N}$ de forma que verifican a) y b):

a) $h(0)=x$, $k(0)=x$

b) $h(y')=(h(y))'$, $k(y')=(k(y))'$, $\forall y\in \mathbb{N}$

Sea $M=\{u\in \mathbb{N}\ /\ h(u)=k(u)\}$

- $0\in M$, por a)
- Sea $u\in \mathbb{N}$. Entonces $h(u)=k(u)$. Por el axioma 2 de Peano $(h(u))' = (k(u))'$, y por b) $h(u')=k(u')$, esto es, $u'\in \mathbb{N}$.

Aplicando el axioma de inducción completa, $M=\mathbb{N}$

ii) Sea $P=\{x\in \mathbb{N}\ /\ \text{podemos definir } x+y ,\ \forall y\in \mathbb{N}\}$

- Definimos $0+y = y$, $\forall y\in \mathbb{N}$.

$0+0=0 \Rightarrow$ verifica a)

$0+y' = y' = (0+y)' \Rightarrow$ verifica b)

Luego $0\in P$.

▪ Sea $x \in P$ y veamos que $x' \in P$.

Como $x \in P$ existe $x+y \quad \forall y \in \mathbb{N}$ verificando a) y b).

Definimos $x'+y=(x+y)'$

$x'+0=(x+0)'=x' \Rightarrow$ verifica a)

$x'+y'=(x+y')' = ((x+y)')'=(x'+y)' \Rightarrow$ verifica b)

Luego $x' \in P$

Aplicando el axioma de inducción completa $P=\mathbb{N}$ ■

Propiedades

i) $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{N}$ (asociativa)

ii) $x+y=y+x$, $\forall x,y \in \mathbb{N}$ (conmutativa)

iii) $x+0=0+x=x$, $\forall x \in \mathbb{N}$ (elemento neutro)

iv) Si $x \in \mathbb{N}-\{0\}$, entonces $x+y \neq y \quad \forall y \in \mathbb{N}$

v) Si $x,y \in \mathbb{N}$ son tales que $x \neq y$, entonces $z+x \neq z+y$, $\forall z \in \mathbb{N}$.

-Dem-

i) Sean $x,y \in \mathbb{N}$, y definamos

$A=\{z \in \mathbb{N} \ / \ (x+y)+z=x+(y+z)\}$

Se comprueba, vía el axioma de inducción completa, que $A=\mathbb{N}$.

ii) Sea $x \in \mathbb{N}$ y $A=\{y \in \mathbb{N} \ / \ x+y=y+x\}$. Igual que antes, $A=\mathbb{N}$.

iii) Evidente.

iv) y v) Análogos a i) ■

Proposición. Ley de tricotomía

Para todo par de números naturales x,y se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

a) $x=y$
b) Existe $u \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $x=y+u$ (además es único)
c) Existe $v \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $y=x+v$ (además es único)

-Dem-

Por la propiedad iv) se tiene que a) es incompatible con b) y con c). Veamos que tampoco b) y c) pueden darse al mismo tiempo.

Supongamos que $x=y+u$ y que $y=x+v$ con $u, v\in \mathbb{N}-\{0\}$. Entonces $x=x+(v+u)$, lo cual es imposible por ser $u+v\neq 0$.

Veamos ahora que, fijado $x\in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A=\{y\in \mathbb{N} \ / \text{ se verifica a), b) o c)}\}$$

coincide con $\mathbb{N}$.

- Supongamos y=0. Pueden ocurrir dos cosas:
  - $x=0$, en cuyo caso $x=y \Rightarrow$ se verifica a)
  - $x\neq 0$. En tal caso podemos tomar $u=x$, y se tiene que $x=0+u=y+u \Rightarrow$ se verifica b)

  Luego $0\in A$
- Supongamos que $y\in A$ y vamos a probar que $y'\in A$. Como $y\in A$ pueden ocurrir tres cosas:
  - $x=y$, entonces $y'=x'=x+1 \Rightarrow$ se verifica c)
  - $x=y+u$, con $u\neq 0$. En tal caso existe $w\in \mathbb{N}$ con $w'=u$. Entonces $x=y+w'=(y+w)'=y'+w \Rightarrow$ se verifica b) (si $w\neq 0$; si $w=0 \Rightarrow x=y' \Rightarrow$ a))
  - $y=x+v$, con $v\neq 0$. Entonces $y'= (x+v)'=x+v' \Rightarrow$ se verifica c).

  En cualquier caso, $y'\in A$

  Por el axioma de inducción completa, $A=\mathbb{N}$.

  (La unicidad en b) y c) es consecuencia de la propiedad v)) ■

► PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN

A cada par de números naturales x,y le asignamos otro número natural que representamos por $x\cdot y$ ó xy, tal que:

a) $x\cdot 0=0$, $\forall x\in \mathbb{N}$

b) $x\cdot y'=x\cdot y+x$, $\forall x,y\in \mathbb{N}$

El número natural xy se llama producto de x por y. A los números x e y se le llama factores.

Vamos a comprobar que la definición es buena.

Teorema

i) Para cada $x\in\mathbb{N}$ hay a lo sumo una forma de definir xy $\forall y\in\mathbb{N}$, de manera que se verifiquen a) y b) (unicidad)

ii) $\forall x,y\in\mathbb{N}$ es posible definir xy de modo que se verifiquen a) y b) (existencia)

-Dem- (En lugar de demostrar este teorema se puede decir que es análogo al de la suma)

i) Supongamos que dado $x\in\mathbb{N}$ existen h(y) , k(y) $\in\mathbb{N}$ $\forall y\in\mathbb{N}$ de forma que verifican a) y b):

a) h(0)=0 , k(0)=0

b) h(y')=h(y)+x , k(y')=k(y)+x

Sea $M=\{u\in\mathbb{N} \;/\; h(u)=k(u)\}$

- $0\in M$, por a)
- Sea $u\in\mathbb{N}$. Entonces h(u)=k(u) y por tanto h(u)+x=k(u)+x , es decir, h(u')=k(u'), esto es $u'\in M$.

Aplicando el axioma de inducción completa, $M=\mathbb{N}$

ii) Sea $P=\{x\in\mathbb{N} \;/$ podemos definir xy, $\forall y\in\mathbb{N}\}$

- Para x=0, definimos xy=0 $\forall y\in\mathbb{N}$

  $0\cdot 0=0 \Rightarrow$ verifica a)

  $0\cdot y'=0=0\cdot y+0 \Rightarrow$ verifica b)

  Luego $0\in P$
- Sea $x\in P$ y veamos que $x'\in P$.

  Como $x\in P$ existe xy $\forall y\in\mathbb{N}$ verificando a) y b)

  Definimos x'y=xy+y

  $x'\cdot 0=x\cdot 0+0=0 \Rightarrow$ verifica a)

  $x'\cdot y'=xy'+y'=(xy+x)+y'=xy+(x+y')=xy+(x'+y)=(xy+y)+x'=x'y+x' \Rightarrow$ verifica b)

  Luego $x'\in P$.

Aplicando el axioma de inducción completa, $P=\mathbb{N}$. ■

Propiedades

i) xy=yx , $\forall x,y\in\mathbb{N}$ (conmutativa)

ii) (xy)z=z(yz) , $\forall x,y,z\in\mathbb{N}$ (asociativa)

iii) 1x=x1=x $\forall x\in\mathbb{N}$ (elemento neutro)

iv) x(y+z)=xy+xz , $\forall x,y,z\in\mathbb{N}$ (distributiva del producto respecto de la suma)

(Las demostraciones son análogas a las anteriores)

► RESTA O SUSTRACCIÓN

Es la operación inversa de la adición.

Fijada la suma, z, y uno de los sumando, x, la sustracción consiste en encontrar el otro sumando, y; es decir, dados $z,x \in \mathbb{N}$ buscamos $y \in \mathbb{N}$ tal que $x+y=z$. Se escribe $z-x=y$.

A z se le llama minuendo, a x sustraendo, a y se le llama resto o diferencia. (Observemos que en el campo de los naturales no existe la diferencia si el minuendo es menor que el sustraendo)

► POTENCIAS

Si un número natural x se multiplica por sí mismo k veces, el producto obtenido se representa por x^k, y se lee "potencia de base x y exponente k".

$$x^k = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots^{(k}\ldots \cdot x$$

Como consecuencia de las propiedades del producto obtendremos:

i) $x^k \cdot x^n = x^{k+n} \quad , \quad \forall x,k,n \in \mathbb{N}$

ii) $\left(x^k\right)^n = x^{k \cdot n} \quad , \quad \forall x,k,n \in \mathbb{N}$

iii) $(xy)^k = x^k \cdot y^k \quad , \quad \forall x,k,n \in \mathbb{N}$

iv) $1^k = 1 \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$

► DIVISIÓN EXACTA

Es la operación inversa de la multiplicación.

Fijado el producto, z, y uno de los factores, x, la división exacta consiste en encontrar el otro factor, y; es decir, dados $z,x \in \mathbb{N}$ buscamos $y \in \mathbb{N}$ tal que $xy=z$. Se escribe $z:x=y$.

A z se le llama dividendo, a x divisor, a y se le llama cociente exacto. (Notemos que en el campo de los números naturales no es posible la división exacta si el dividendo no es un múltiplo del divisor)

► DIVISIÓN ENTERA

Cuando la división exacta no es posible, el dividendo está comprendido entre dos múltiplos consecutivos del divisor, a saber, si $z,x \in \mathbb{N}$ puedo encontrar $y \in \mathbb{N}$ con $xy<z<xy'=x(y+1)$.

En tal caso, a y se le llama cociente entero por defecto; a $w=z-xy$ se le llama resto por defecto ($w<x$).

Por tanto, se define la división entera como sigue:

Dividir un número natural z por el natural x, es descomponer z en dos sumandos, $z=xy+w$. El primero es un múltiplo de x y el segundo es menor que x. Si ocurriera que $w=0$, entonces la división es exacta.

La división entera tiene carácter único, es decir, si $z=xy_1+w_1$ y $z=xy_2+w_2$, con $w_1,w_2<x$, entonces $y_1=y_2$ y $w_1=w_2$.

I.3. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE $\mathbb{N}$

Hemos visto que las operaciones suma y producto en $\mathbb{N}$ verifican las propiedades siguientes:

Adición $\Rightarrow$ asociativa, conmutativa, $0\in\mathbb{N}$ es el elemento neutro.

Multiplicación $\Rightarrow$ asociativa, conmutativa, $1\in\mathbb{N}$ es el elemento neutro.

Además el producto es distributivo respecto de la suma.

Con todo esto se tiene que $(\mathbb{N},+,\cdot)$ es un *semianillo conmutativo*.

I.4. RELACIÓN DE ORDEN DE $\mathbb{N}$

Aunque ya se ha utilizado la relación de orden que poseen los naturales en algún apartado anterior, es el momento de formalizar este concepto tan intuitivo.

Definición

Sean $x,y\in\mathbb{N}$.

Diremos que x es mayor que y, $x>y$, si existe $u\in\mathbb{N}-\{0\}$ tal que $x=y+u$.

Diremos que x es menor que y, $x<y$, si existe $v\in\mathbb{N}-\{0\}$ tal que $y=x+v$.

Por un resultado anterior sabemos que se presenta uno y sólo de los casos: $x=y$, $x>y$ ó $x<y$.

Se escribe $x\geq y$, x mayor o igual que y, si $x>y$ ó $x=y$.

Se escribe $x\leq y$, x menor o igual que y, si $x<y$ ó $x=y$.

Propiedades

i) $\leq$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$, esto es, verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva y además es conexa.

ii) $\leq$ es compatible con la suma, es decir, si $x,y,z,w \in \mathbb{N}$ son tales que $x \leq y$, $z \leq w$, entonces $x+z \leq y+w$.

iii) $\leq$ es compatible con el producto es decir, si $x,y,z,w \in \mathbb{N}$ son tales que $x \leq y$, $z \leq w$, entonces $x \cdot z \leq y \cdot w$.

iv) Propiedades cancelativas:

- Sean $x,y,z \in \mathbb{N}$. Entonces $x+z \leq y+z$ si y sólo si $x \leq y$.
- Sean $x,y,z \in \mathbb{N}$ con $z \neq 0$. Entonces $xz \leq yz$ si y sólo si $x \leq y$

v) $0 \leq x$, $\forall\ x \in \mathbb{N}$

vi) Sean $x,y \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica:

- $x<y$ si sólo si $x+1 \leq y$
- $x \leq y$ si y sólo si $x<y+1$

(Las demostraciones son inmediatas a partir de las definiciones dadas)

Vamos a ver ahora un teorema y un corolario muy importante, con los que concluirá esta primera parte del tema.

Teorema

$(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.

-Dem-

Hay que probar que si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \leq x \quad \forall x \in A$. (A este elemento a se le llama mínimo de A.)

Consideremos $B=\{u \in \mathbb{N} \ / \ u \leq x , \ \forall x \in A\}$

- Como $0 \leq y$, $\forall y \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq x \quad \forall x \in A$ y por tanto $0 \in B$
- Sea $x \in A$. Entonces $x+1 \notin B$, ya que $x<x+1$. Luego $B \neq \mathbb{N}$. En tal caso debe existir $a \in B$ tal que $a+1 \notin B$ (si no fuera así, por el axioma de inducción completa deduciríamos que $B=\mathbb{N}$, lo cual no es cierto).

Veamos que a es el mínimo de A:

- $a \leq x$, $\forall x \in A$, ya que $a \in B$.
- Si ocurriera que $a \notin A$ se tendría que $a<x$, $\forall x \in A$ y por tanto $a+1 \leq x$, $\forall x \in A$, de donde a+1 estaría en B, y ya sabemos que eso no es cierto. Por tanto, $a \in A$.

Conclusión: a es el mínimo de A. ■

Corolario

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ acotado superiormente (es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ con $x \leq k$, $\forall x \in A$). Entonces, A tiene máximo (es decir, existe un elemento en A que es mayor o igual que todos los elementos de A.)

-Dem-

Considero $B=\{z \in \mathbb{N} : x \leq z, \ \forall x \in A\}$

Por hipótesis, $B \neq \emptyset$ $(k \in B)$

Aplicando el teorema anterior al conjunto B deducimos la existencia de un elemento $b \in B$ tal que $b \leq z, \ \forall z \in B$.

Veamos que b el máximo de A.

- $x \leq b, \ \forall x \in A$ por estar b en B.
- $b \in A$. Distinguimos dos casos:

  - Si b=0, entonces A={0} y por tanto $b \in A$.

  - Si $b \neq 0$, entonces existe $u \in \mathbb{N}$ tal que b=u'. Si $b \notin A$, por estar b en B se tendría que $x<b=u'$ $\forall x \in A$ y por tanto $x \leq u, \ \forall x \in A$. Entonces $u \in B$ y es menor que el mínimo de B, lo cual es absurdo. Luego $b \in A$.

Conclusión: b es el máximo de A. ■

II. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

La serie de los números naturales es infinita, y por tanto es imposible representar cada número natural con un símbolo diferente. Surge como necesario adoptar una serie de normas para poder expresar cualquier número usando una cantidad finita de símbolos.

Así, llamaremos sistema de representación o de numeración a un conjunto de símbolos utilizados con un cierto método para asignar numerales o símbolos numéricos a los números.

Según la naturaleza del método para combinar los símbolos aparecen distintos tipos de sistemas numeración.

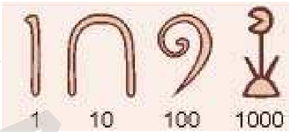
II.1. SISTEMAS ADITIVOS

Son aquellos que se basan en el principio aditivo para obtener los números representados por un conjunto dado de símbolos. Tienen símbolos para el número 1, para la base y potencias de la base, y algunas veces para múltiplos de potencias de la base. Así, el número representado por un conjunto particular de símbolos es la suma de los números que cada símbolo del conjunto representa.

Veamos algunos ejemplos de culturas que adquirieron este tipo de sistemas.

■ <u>Sistema egipcio de jeroglíficos</u>

Data del 3000 a.C. y fue usado durante 2000 años. Algunos de los símbolos usados son:



Por ejemplo ∩∩I=10+10+1=21

■ <u>Sistema romano</u>

Data de la época del Imperio Romano y fue utilizado en los países europeos hasta el siglo XVIII (de hecho hoy sigue utilizándose en ciertos aspectos).

Expresa los números mediante las siguientes letras:

Romano	I	V	X	L	C	D	M
Decimal	1	5	10	50	100	500	1000

Este sistema no es puramente aditivo, también es posicional, pues que el símbolo de un número esté a la izquierda o a la derecha de un número mayor indica sustracción o adición, respectivamente.

Más propiedades de este sistema son:

- El principio repetitivo se usa para representar números entre aquellos para los que sí se dispone de símbolos distintos.
- Podría considerarse un sistema de base 10, en el que se han introducido símbolos intermedios para el 5, 50 y 500.
- El principio multiplicativo se usa para representar números grandes: colocando una o dos barras encima del símbolo significa que debe ser multiplicado por 1000 y 1000000, respectivamente.

■ Sistema jónico-griego

Consta de 24 letras del alfabeto griego más otros tres símbolos. La principal ventaja del sistema es que se pueden escribir números muy grandes con pocos símbolos, sin embargo hay que memorizar muchos símbolos. Para evitar la confusión entre número y palabra, se dibuja una línea en la parte superior del número.

II.2. SISTEMAS DE NUMERACIÓN DE VALORES RELATIVOS O POSICIONALES

En estos sistemas se escogen símbolos para el cero, uno, dos, …, hasta el número anterior a la base; es decir, en un sistema de base b hay b símbolos.

El más importante sistema posicional es el decimal, inventado por los indios e introducido en Europa por los árabes durante la Edad Media. Hoy día, está adoptado universalmente.

Usa 10 símbolos o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por tanto, es un sistema posicional de base 10. Cualquier número se puede expresar como una sucesión de símbolos y se interpreta como la suma de los términos que resultan de multiplicar el valor de cada símbolo por la potencia correspondiente de diez. Dicha potencia de diez está determinada por la posición que ocupa el símbolo en relación al punto decimal.

Por ejemplo: $42'1= 4\cdot 10^1+2\cdot 10^0+1\cdot 10^{-1}$

Además del sistema decimal, en la actualidad son de interés práctico el sistema binario (utiliza los símbolos 0, 1), octal (utiliza los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) y hexadecimal (utiliza los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F). Estos sistemas son usados por las calculadoras a la hora de representar información y efectuar las operaciones aritméticas.

Veamos algunos resultados relativos a los sistemas posicionales.

Teorema fundamental de la numeración

Dado un número natural b>1, todo número natural m se expresa de manera única de la siguiente forma: $m=a_0+a_1b+a_2b^2+\ldots..+a_nb^n$, donde los a_i, para i=1,…,n, son números naturales menores que b.

-Dem-

- Si m<b entonces $m=a_0$ y el teorema está demostrado.
- Si $m \geq b$, dividimos m por b. Si el cociente entero es mayor que b, volvemos a dividir por b, y así sucesivamente hasta obtener un cociente entero menor que b.

$$
\begin{array}{llllll}
m & \underline{|b} & & & & \\
a_0 & q_1 & \underline{|b} & & & \\
 & a_1 & q_2 & & & \\
 & & & .. & & \\
 & & & & .. & \\
 & & & & q_{n-1} & \underline{|b} \\
 & & & & \underbrace{a_{n-1}} & qn
\end{array}
$$

Obtenemos las relaciones:

$$
\begin{cases}
m = bq_1 + a_0 & , \ a_0 < b \\
q_1 = bq_2 + a_1 & , \ a_1 < b \\
..... & \\
q_{n-1} = bq_n + a_{n-1} & , \ a_{n-1} < b \\
q_n = a_n < b &
\end{cases}
$$

Sustituyendo el valor de cada q_i en la relación anterior obtenemos $m=a_0+a_1b+a_2b^2+.....+a_nb^n$.

Veamos la unicidad:

Supongamos que $m=a_0+a_1b+a_2b^2+.....+a_nb^n = a'_0+a'_1b+a'_2b^2+.....+a'_nb^n$ con a_i, $a'_i<b$.

Entonces, $m=a'_0+b(a'_1+....+a'_nb^{n-1})$, de donde a'_0 es el resto de dividir m por b. Como el cociente y el resto de la división entera son únicos se tiene que por un lado $a_0=a'_0$, y además $a_1+a_2b+.....+a_nb^{n-1}= a'_1+a'_2b....+a'_nb^{n-1}$. Razonado ahora de forma análoga, obtenemos que $a_1=a'_1$, y así sucesivamente, con lo que la unicidad queda demostrada. ■

Normalmente esto lo expresaremos $m=a_na_{n-1}......a_1a_{0\ (b}$

Propiedades de la numeración

1. Los números b, b^2, b^3,….. se expresan respectivamente en el sistema de base b por 10, 100, 1000, ….

(Demostración trivial)

2. Si $m=a_na_{n-1}......a_1a_{0(b}$ entonces $m\cdot b^p=a_n......a_1a_00..._{(p)}...0_{(b}$, es decir, multiplicar m por b^p equivale a añadir p ceros a la derecha de m.

(Demostración inmediata)

3. Si el número $m_{(b}$ tiene r cifras, entonces se verifica que $b^{r-1} \leq m<b^r$, y recíprocamente.

-Dem-

$m=a_0+a_1b+a_2b^2+.....+a_{r-1}b^{r-1}$ con $a_{r-1}\neq 0$. Entonces $m\geq b^{r-1}$.

Por otra parte como $a_i<b$ para i=0,1,…,r-1 se tiene que:

$a_1b+a_0<a_1b+b=(a_1+1)b\leq b^2$

$a_2b^2+a_1b+a_0<a_2b^2+b^2=(a_2+1)b^2\leq b^3$

....

$m=a_{r-1}b^{r-1}+....+a_1b+a_0<(a_{r-1}+1)b^{r-1}\leq b^r$

Por tanto $b^{r-1}\leq m<b^r$

Recíprocamente, si $b^{r-1}\leq m<b^r$ entonces m tiene r cifras, pues si tuviese más de r sería $m\geq b^r$ y si tuviese menos se tendría $m<b^{r-1}$. ■

4. Si m y n son dos números naturales tales que $m_{b)}$ tiene r cifras y $n_{b)}$ tiene s cifras con s<r, entonces n<m.

-Dem-

Si s<r, entonces $s\leq r-1$ y por tanto $b^{r-1}\leq m$ y $n<b^s$ de donde $n<b^s\leq b^{r-1}\leq m$ ■

5. Si $m_{b)}$ y $n_{b)}$ son dos números con el mismo número de cifras, entonces n<m si la primera cifra empezando por la izquierda de n que sea distinta de su correspondiente en m, es menor que ésta.

-Dem-

Sea a'_p la primera cifra de n que es menor que su correspondiente a_p en m. Entonces, suprimiendo las cifras situadas a la izquierda de a'_p y a_p en n y m respectivamente queda:

$$a'_p a'_{p-1} \ldots\ldots a'_1 a'_0 = n_1$$

$$a_p a_{p-1} \ldots\ldots a_1 a_0 = m_1$$

Si $a'_p < a_p$ entonces $a'_p + 1 \le a_p$, luego se tiene que:

$$n_1 = a'_p b^p + a'_{p-1} b^{p-1} + \ldots + a'_1 b + a_0$$

$$n_1 < (a'_p + 1) b^p \le a_p b^p \le m_1$$

y por tanto n<m ■

Cambio de un sistema de numeración a otros

Para pasar de un sistema de numeración a otro sólo es preciso saber efectuar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división en el sistema decimal. Distinguiremos varios casos:

Primer caso ⇒ Escribir en el sistema decimal un número dado en el sistema de base b.

Sea $m_{(b} = a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_1 a_{0(b}$. Para pasarlo al sistema decimal basta usar su expresión polinómica $a_0 + a_1 b + \ldots + a_n b^n$ y ejecutar todas la operaciones en el sistema decimal.

Ejemplo: $512_{(6} = 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 = 1303_{(10}$.

Segundo caso ⇒ Escribir en el sistema de base b un número dado en sistema decimal.

Para ello basta usar el teorema fundamental de numeración.

Ejemplo: Expresar en base 3 el número 48

$$\begin{array}{llll} 48 & \underline{|3} & & \\ \underset{\smile}{0} & 16 & \underline{|3} & \\ & \underset{\smile}{1} & 5 & \underline{|3} \\ & & \underset{\smile}{2} & 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 48_{(10} = 1210_{(3}$$

Tercer caso $\Rightarrow$ Para expresar en el sistema de numeración de base b' un número escrito en el sistema de base b, se efectúa primero el paso de base b a base 10 (sistema decimal) y después de base 10 a base b'.

III. BIBLIOGRAFÍA

■ Aparicio del Prado, C y Payá Albert, R. **Análisis matemático**. Universidad de Granada, 1996

■ Pérez González, J. **Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una variable**.

■ M. de Guzmán, B. Rubio. **Análisis matemático**. Editorial Pirámide.

■ J.A. Fernández Viña. Análisis matemático I. Editorial Tecnos.

■ Jesús Fernández Novoa. **Análisis Matemático I**. Ed. UNED

■ **Matemáticas Básicas**, curso de acceso. UNED